

مقاله علمی - پژوهشی

محاسبه مودهای نرمال غیرخطی با استفاده از روش
EPFMمیثم جلوه^۱، سیدمجتبی موسوی^۲ و محمدهمایون صدر^{۳*}

۱-۳- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

* تهران- خیابان حافظ، صندوق پستی: ۴۴۱۳-۱۵۸۷۵

sadr@aut.ac.ir

در دهه اخیر مودهای نرمال غیرخطی توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود معطوف نموده و روش و الگوریتم های زیادی برای محاسبه آن ها ارائه شده است. از میان روش های ارائه شده، ترکیب روش شو تینگ و تداوم پاسخ متناوب (Continuation of periodic solution) یکی از قویترین روش ها می باشد. اما کماکان هزینه محاسباتی روش مذکور، استفاده از آن را محدود نموده است. در این مقاله یک رابطه به روزرسانی مورد استفاده قرار گرفته است تا هزینه های محاسباتی روش را کاهش دهد. استفاده از این رابطه به روزرسانی زمان انجام محاسبات را به شدت کاهش داد به طوری که سرعت محاسبه مودهای نرمال غیرخطی به میزان ده برابر افزایش یافت. همچنین هر چه میزان قدرت نرم های غیرخطی در سیستم افزایش می یابد، کارایی رابطه به روزرسانی نیز بیشتر می گردد. به منظور بررسی دقت روش ارائه شده، یک سیستم دو درجه آزادی مورد مطالعه قرار گرفت و مشاهده شد که نتایج به دست آمده با نتایج موجود در سایر منابع سازگاری بسیار خوبی دارد.

واژه های کلیدی: مودهای نرمال غیرخطی، روش تداوم پاسخ متناوب، رابطه به روزرسانی

مقدمه

مودهای نرمال غیرخطی ابزاری قوی در تحلیل سیستم های غیرخطی هستند. تا دهه ۹۰ میلادی مودهای نرمال غیرخطی بیشتر بعنوان مفاهیم تئوری شناخته می شدند، تا اینکه با کارهای واکایس [۳-۱] و شاو و پیر [۴-۶] نگاهی جدید به آنها ایجاد شد. در دهه اخیر توجه بسیاری از پژوهشگران به این موضوع مطوف شده است و مقالات مروری متعدد و کاملی درباره مودهای نرمال غیرخطی ارائه شده است [۷-۱۰]. سنگ بنای تعریف مود نرمال غیرخطی توسط لیاپانوف گذاشته شد. لیاپانوف اثبات کرد که برای یک سیستم همیلتونی n درجه آزادی

۱. دانشیار

۲. دانشجوی دکتری

۳. دانشجوی دکتری

که در وضعیت تشدید داخلی قرار ندارد، حول نقطه تعادل سیستم n پاسخ متناوب هم آهنگ وجود دارد [۱۱]. پس از وی تلاش های زیادی در این راستا صورت گرفت. وینستن و موزر در سال های ۱۹۷۳ و ۱۹۷۶، تئوری لیاپانوف را در صورت وجود تشدید داخلی تعمیم دادند [12, 13]. کاودرر اولین کسی بود که روش های کمی برای محاسبه مودهای نرمال غیرخطی ارائه داد [14]. امروزه دو تعریف رایج برای مودهای نرمال غیرخطی وجود دارد. روزنبرگ مودهای نرمال غیرخطی را به صورت ارتعاشات متناوب هم آهنگ در سیستم های پایستار تعریف نمود [۱۵]. این تعریف بدان معناست که همه نقاط سیستم به صورت همزمان به مقدار اکسترمم خود می رسند. شاو و پیر خاصیت عدم تغییر مودهای نرمال غیرخطی را مدنظر قرار دادند و مودهای نرمال غیرخطی را به صورت مانیفولد ثابت در فضای فازی تعریف کردند. این بدان معناست که اگر حرکتی

مقالات بعنوان روش مینا برای صحت سنجی سایر روش‌ها در نظر گرفته می‌شود اما کماکان هزینه محاسباتی این روش، از مشکلات اساسی آن است.

در این مقاله به منظور کاهش زمان انجام محاسبات از رابطه به روزرسانی که توسط دوفلپارد و همکارانش ارائه شده است، استفاده می‌گردد [۴۰]. این الگوریتم بر اساس کار دوفلپارد و همکارانش روش دنبال کننده مسیر بهینه (Efficient path following method) یا EPFM نامیده می‌شود.

در ادامه ابتدا تئوری روش ارائه و سپس کارایی آن در قالب تحلیل یک سیستم دو درجه آزادی غیرخطی سنجیده می‌شود.

روش دنبال کننده مسیر بهینه

کلیات روش EPFM مشابه روشی است که پیترز و همکارانش ارائه داده‌اند. با این تفاوت که این روش از یک رابطه به روز رسانی جهت کاهش هزینه محاسباتی الگوریتم بهره می‌برد. برای استفاده از این روش لازم است تا ابتدا یک پاسخ متناوب سیستم در یک سطح انرژی، مشخص باشد. سپس با استفاده از روش‌های تداوم پاسخ متناوب بر اساس شبه طول قوس، تغییرات مودهای نرمال غیرخطی با تغییرات انرژی موجود در سیستم محاسبه می‌گردد. با توجه به این موضوع این فصل به دو بخش تقسیم می‌گردد. در بخش اول یافتن پاسخ متناوب سیستم غیرخطی با استفاده از روش شوتینگ و در بخش دوم تداوم پاسخ متناوب بر اساس شبه طول قوس مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

روش شوتینگ

به طور کلی روش‌های محاسبه پاسخ تناوبی یک سیستم به دو دسته کلی حوزه فرکانس و حوزه زمان تقسیم می‌شود. روش متداول در حوزه فرکانس، هارمونیک بالانس و روش‌های توسعه یافته آن است. در حوزه زمان روش‌های متداول عبارتند از: شوتینگ یک مرحله‌ای، شوتینگ چند مرحله‌ای، کالوکیشن و تفاضل‌های محدود.

در روش‌های حوزه زمان، مسئله مقدار اولیه به یک مسئله مقدار مرزی دو نقطه‌ای تبدیل می‌شود. در این روش‌ها به جستجوی یک شرایط اولیه و یک پاسخ با دوره تناوب پرداخته می‌شود، به گونه‌ای که رابطه (۱) برقرار باشد.

$$x(x_0, T) = x_0 \quad (1)$$

روش شوتینگ یک مرحله‌ای به علت ساختار ساده‌ای که دارد، یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی برای یافتن پاسخ تناوبی سیستم‌های دینامیکی است. این روش در بسته‌های نرم‌افزاری زیادی نظیر LOCIBIF و CANDSYS/QA مورد استفاده قرار گرفته است [۳۴ و ۳۵]. از جمله مزایای دیگر این روش این است که ماتریس تک

در این مانیفولد آغاز شود، تا انتها نیز در آن باقی می‌ماند. اگر سیستمی دچار تشدید داخلی شود، برخی درجات آزادی سریعتر از سایر درجات آزادی حرکت می‌نمایند. در سال ۲۰۰۹ کرشن و همکارانش تعریف روزنبرگ را تعمیم دادند و مودهای نرمال غیرخطی را به صورت ارتعاشات متناوب ولی نه لزوماً هم‌آهنگ تعریف کردند. در ۲۰۱۶ هالر و پانسیون تعریف کرشن و همکاران را تعمیم دادند و مود نرمال غیرخطی را به صورت حرکت بازگشتی که با تعداد محدودی فرکانس از بسط فوریه قابل بیان باشد، تعریف نمودند [۱۶].

بر اساس این دو تعریف، روش‌های محاسبه مودهای نرمال غیرخطی به دو دسته کلی تقسیم می‌شود: روش‌هایی که به محاسبه مانیفولد ثابت به صورت مستقیم می‌پردازند [۱۷-۲۱] و روش‌هایی که با جستجوی پاسخ متناوب در سیستم‌های غیرخطی سر و کار دارند.

در این مقاله نیز محاسبه مودهای نرمال غیرخطی با استفاده از تعریف روزنبرگ مد نظر است. روش‌های ریاضی بسیار قوی و پیچیده‌ای برای محاسبه پاسخ‌های متناوب در سیستم‌های غیرخطی وجود دارد [۲۲، ۲۳]. یکی از اولین تلاش‌ها برای محاسبه مودهای نرمال غیرخطی به صورت پاسخ‌های متناوب سیستم با استفاده از روش‌های عددی به وسیله اسلاتر انجام شد [۲۴]. او از روش تداوم ترتیبی برای محاسبه پاسخ متناوب سیستم استفاده نمود. لی و همکارانش از ترکیب روش شوتینگ و تداوم ترتیبی برای محاسبه مودهای نرمال غیرخطی استفاده کردند [۲۵]. در سال ۲۰۰۹، کرشن و همکارانش از ترکیب روش شوتینگ و تداوم پاسخ بر اساس شبه طول قوس استفاده نمودند [۲۶]. آن‌ها با موفقیت مودهای نرمال غیرخطی را برای سیستم‌های گسسته و پیوسته پایستار غیرخطی بدست آوردند [۲۷]. کوتر و همکارانش روش ارائه شده توسط پیترز و همکاران را در نرم افزار تجاری آباکوس اجرا و مودهای نرمال غیرخطی یک صفحه با رفتار غیرخطی هندسی را محاسبه کردند [۲۸، ۲۹]. رنس و همکارانش مودهای نرمال غیرخطی سازه یک ماهواره را با استفاده از روش پیترز و همکارانش محاسبه و برهم کنش مودال در آن را استخراج نمودند. آنها همچنین شواهد تجربی برای نتایج بدست آمده، ارائه دادند [۳۰].

علاوه بر تحلیل سازه‌های واقعی، مودهای نرمال غیرخطی در زمینه‌های دیگر مانند برداشت انرژی [۳۱]، جاذب‌های ارتعاشاتی غیرخطی [۳۲، ۳۳]، به روزرسانی مدل‌های اجزا محدود غیرخطی [۳۴-۳۸] و یافتن خرابی در سازه‌های غیرخطی [۳۹] نیز مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

در میان روش‌های مختلفی که برای محاسبه مودهای نرمال غیرخطی توسعه داده شده‌اند، ترکیب روش شوتینگ و تداوم بر اساس شبه طول قوس بسیار مورد استفاده قرار گرفته است و در بسیاری از

$$z_{p0}^{(k+1)} = z_{p0}^{(k)} + \Delta z_{p0}^{(k)} \quad (7)$$

$$T^{(k+1)} = T^{(k)} + \Delta T^{(k)}$$

که مقادیر $\Delta z_{p0}^{(k)}$ و $\Delta T^{(k)}$ از رابطه ۸ محاسبه می‌گردد:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial z_{p0}} \right|_{(T^k, z_{p0}^k)} \Delta z_{p0}^k + \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_{(T^k, z_{p0}^k)} \Delta T^k = -H(T^k, z_{p0}^k) \quad (8)$$

در رابطه ۸، شماره تکرار در روش شوتینگ می‌باشد. این فرآیند تا رسیدن به دقت مطلوب ادامه می‌یابد. شرط همگرایی حل، خطای نسبی شرایط تناوبی در نظر گرفته می‌شود [۳۱]. این شرط به شکل رابطه ۹ بیان می‌شود که در این رابطه \mathcal{E} دقت مطلوب برای همگرایی حل می‌باشد.

$$\frac{\|H\|}{\|z_{p0}\|} = \frac{\|z(T, z_{p0}) - z_{p0}\|}{\|z_{p0}\|} < \mathcal{E} \quad (9)$$

، ماتریس $\left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_{(T, z_{p0})}$ از رابطه ۱۰ بدست خواهد آمد.

$$\left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_{(T, z_{p0})} = \left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=T} = g(z(T, z_0)) = g(z(0, z_0)) \quad (10)$$

ماتریس $\left. \frac{\partial H}{\partial z_{p0}} \right|_{(T, z_{p0})}$ با استفاده از رابطه ۱۱ تعریف می‌گردد.

$$\frac{\partial H}{\partial z_{p0}}(T, z_{p0}) = \left. \frac{\partial z(t, z_{p0})}{\partial z_{p0}} \right|_{t=T} - \frac{\partial z_{p0}}{\partial z_{p0}} = \left. \frac{\partial z(t, z_{p0})}{\partial z_{p0}} \right|_{t=T} - I \quad (11)$$

بنابراین برای محاسبه $\left. \frac{\partial H}{\partial z_{p0}} \right|_{(T, z_{p0})}$ باید ماتریس ژاکوبی $\left. \frac{\partial z(t, z_0)}{\partial z_0} \right|_{t=T}$

مورد محاسبه قرار گیرد. هر مؤلفه ماتریس ژاکوبی با رابطه ۱۲ تعریف می‌شود. در این رابطه Z_i مؤلفه i ام Z_0 و Z_{0j} مؤلفه j ام Z_0 می‌باشد.

$$\frac{\partial H}{\partial z_{p0}}(T, z_{p0}) = \left. \frac{\partial z(t, z_{p0})}{\partial z_{p0}} \right|_{t=T} - \frac{\partial z_{p0}}{\partial z_{p0}} = \left. \frac{\partial z(t, z_{p0})}{\partial z_{p0}} \right|_{t=T} - I \quad (12)$$

این ماتریس، تغییرات پاسخ در لحظه t را به ازای تغییرات شرایط اولیه نشان می‌دهد. دو روش کلی برای محاسبه این ماتریس وجود دارد: آنالیز حساسیت و تفاضل محدود. در این مقاله از روش تفاضل محدود استفاده می‌شود. در روش تفاضل‌های محدود، معادله حاکم تحت دو شرایط اولیه زیر حل می‌شود. پاسخ نظیر هر یک از

مقدار (Monodromy) در روند اجرای آن تولید می‌شود که در ادامه می‌توان با استفاده از آن به سادگی ضرایب فلوکه را محاسبه و پایداری و ناپایداری پاسخ تناوبی مورد نظر را بررسی کرد. رابطه حاکم بر سیستم در فضای حالت به شکل رابطه (۲) بیان می‌گردد که در آن T بردار متغیرهای وضعیت می‌باشد.

$$z = g(z) \quad (2)$$

میدان برداری در رابطه (۲) به صورت رابطه (۳) تعریف می‌گردد.

$$g(z) = \begin{bmatrix} x \\ -M^{-1}[Kx + f_{nl}(x, x)] \end{bmatrix} \quad (3)$$

پاسخ دینامیکی سیستم برای شرایط اولیه $z(0) = z_0 = [x_0^T \quad \dot{x}_0^T]^T$ به صورت $z(t, z_0) = z(t, z_0)$ نمایش داده می‌شود تا بیانگر وابستگی پاسخ سیستم به شرایط اولیه باشد. پاسخ به صورت $z_p(t, z_{p0})$ پاسخ تناوبی سیستم است اگر شرایط رابطه (۴) را ارضا کند که در این رابطه T کمترین دوره تناوب سیستم است.

$$z_p(t, z_{p0}) = z_p(t + T, z_{p0}) \quad (4)$$

روش شوتینگ یک مرحله‌ای، مسئله مقدار مرزی دو نقطه‌ای با شرایط تناوبی به شکل رابطه ۵ را به صورت عددی حل می‌کند.

$$H(T, z_{p0}) \equiv z_p(T, z_{p0}) - z_{p0} = 0 \quad (5)$$

به H تابع شوتینگ گفته می‌شود و اختلاف بین شرایط اولیه و پاسخ سیستم در لحظه T را نشان می‌دهد. روش شوتینگ یک مرحله‌ای در یک فرآیند سعی و خطا، شرایط اولیه و دوره تناوبی را پیدا می‌کند که شرایط تناوبی را ارضا کند.

این روش مبتنی بر انتگرال‌گیری زمانی مستقیم و الگوریتم نیوتن رافسون است. به این ترتیب که ابتدا یک T و z_{p0} بعنوان شرایط اولیه و دوره تناوب پاسخ سیستم حدس زده می‌شود. سپس پاسخ سیستم در دوره تناوب مفروض T با انتگرال‌گیری مستقیم با استفاده از روش‌های عددی نظیر رانگ کوتا یا نیومارک محاسبه می‌شود. عموماً حدس اولیه (z_{p0}, T) شرایط تناوبی را ارضا نمی‌کند. برای اصلاح حدس اولیه از الگوریتم نیوتن رافسون استفاده می‌گردد. در ادامه به چگونگی اصلاح حدس اولیه از طریق الگوریتم نیوتن رافسون پرداخته خواهد شد.

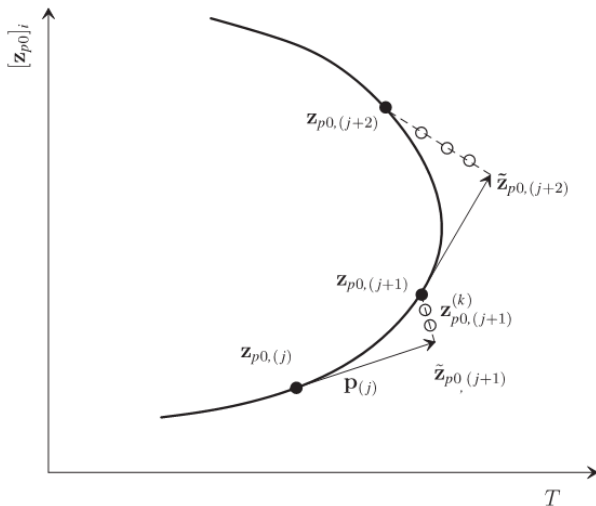
مقادیر اصلاح Δz_{p0}^0 و ΔT^0 با بسط تیلور تابع شوتینگ بدست می‌آید. بسط تیلور تابع شوتینگ به شکل رابطه ۶ می‌باشد.

$$H(T, z_{p0}) + \left. \frac{\partial H}{\partial z_{p0}} \right|_{(T, z_{p0})} \Delta z_{p0}^0 + \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_{(T, z_{p0})} \Delta T^0 + H.O.T = 0 \quad (6)$$

شرایط اولیه z_{p0} و دوره تناوب T که حرکت تناوبی سیستم را مشخص می‌کند، با رابطه تکرارپذیر ۷ به دست می‌آید.

روش تداوم پاسخ متناوب بر اساس شبه طول قوس

در این مقاله از روش تداوم پاسخ متناوب بر اساس شبه طول قوس (Pseudo arclength continuation) استفاده می‌شود. این روش یکی از قویترین روش‌های تداوم پاسخ متناوب می‌باشد و به راحتی قادر است تا از نقاط بازگشت روی منحنی پاسخ عبور کند. در این روش از یک نقطه معلوم روی منحنی پاسخ، پاسخ بعدی روی مسیر محاسبه می‌شود. روش این روش دارای سه مرحله می‌باشد. مرحله اول پیش‌بینی می‌باشد. در این مرحله یک حدس اولیه برای نقطه بعدی تخمین زده می‌شود. مرحله دوم، مرحله اصلاح حدس اولیه است. در این مرحله حدس اولیه تخمین زده شده در مرحله پیش‌بینی، با استفاده از روش نیوتن-رافسون اصلاح می‌گردد. مرحله سوم تعیین طول گام برای تخمین حدس اولیه پاسخ بعدی می‌باشد.



شکل ۱- نمای شماتیک روش تداوم پاسخ بر اساس شبه طول قوس

برای پیش‌بینی از روش تانژانت استفاده می‌شود. در این روش بردار مماس $P_{(j)} = [P_{z(j)}^T \ P_{T(j)}^T]^T$ بر مسیر است با رابطه زیر محاسبه می‌شود. در این رابطه نحوه محاسبه ماتریس‌های $\frac{\partial H}{\partial T} \Big|_{(T_{(j)}, z_{p0(j)})}$ و $\frac{\partial H}{\partial z_{p0}} \Big|_{(T_{(j)}, z_{p0(j)})}$ به همان ترتیبی است که در روش

شوتینگ توضیح داده شد. همچنین h معادله شرایط فازی می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|_{(z_{p0(j)}, T_{(j)})} & \frac{\partial H}{\partial T} \Big|_{(z_{p0(j)}, T_{(j)})} \\ \frac{\partial h}{\partial z_0} \Big|_{(z_{p0(j)})} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{z(j)} \\ P_{T(j)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

برای محاسبه بردار مماس، یکی از مؤلفه‌های آن ثابت در نظر گرفته می‌شود و سپس با استفاده از روش Moore-Penrose دستگاه حاصل حل می‌گردد. در ادامه با استفاده از رابطه $|P|=1$ بردار مماس نرمال می‌شود.

این شرایط اولیه به ترتیب با $z(T, z_0)$ و $z_k(T, z_0 + \delta e_k)$ نشان داده می‌شود.

$$z(0) = z_0 \quad (13)$$

$$z^k(0) = z_0 + \delta e_k \quad (14)$$

در رابطه بالا e_k ستون k ام ماتریس همانی و δ یک عدد کوچک می‌باشد. در نهایت عناصر ماتریس $J = \frac{\partial z(t, z_0)}{\partial z_0} \Big|_{t=T}$ از رابطه (۱۵) بدست می‌آید.

$$J_{[k]} = \frac{z(T, z_0 + \delta e_k) - z(T, z_0)}{\delta} \quad (15)$$

همان‌طور که مشخص است، بیشترین هزینه این روش مربوط به تولید ماتریس ژاکوبی در هر بار سعی می‌باشد. اگر از آنالیز حساسیت استفاده شود، لازم است تا از معادلات دیفرانسیل با n^2 متغیر انتگرال‌گیری شود. اگر از روش تفاضل محدود استفاده شود، لازم است تا n بار از معادله حاکم بر سیستم انتگرال‌گیری گردد. برای کاهش زمان تولید ماتریس ژاکوبی در فرآیند سعی و خطا یک بار در اولین سعی، ماتریس ژاکوبی از یکی از این دو روش محاسبه می‌گردد. سپس در سایر سعی‌ها ماتریس ژاکوبی با استفاده از روابط به روز رسانی تولید می‌شود. دوفلهرارد و همکارانش رابطه ۱۶ را برای محاسبه ماتریس ژاکوبی پیشنهاد می‌کنند. در این رابطه k شماره سعی‌ها می‌باشد.

$$\frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|^{k+1} = \frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|^k + H^{k+1} \frac{(\Delta z_0^k)^T}{|\Delta z_0^k|} \quad (16)$$

با محاسبه ماتریس ژاکوبی، یک دستگاه n معادله و $n+1$ مجهول به‌دست می‌آید: n مجهول Δz_0 و یک مجهول ΔT . همان‌طور که مشخص است این دستگاه، یک دستگاه نامعین است. علت این امر آن است که پاسخ متناوب یک سیستم اتوناموس نسبت به انتقال خطی مبدأ زمان نامتغیر است. یعنی اگر $z(t, z_0)$ یک پاسخ متناوب سیستم باشد، آنگاه $z(t + \tau, z_0)$ برای هر τ دلخواه، پاسخ متناوب سیستم خواهد بود.

به منظور یکتا بودن پاسخ این دستگاه، یک معادله شرایط فاز به این دستگاه معادلات اضافه می‌شود. در این مقاله شرایط فازی به صورت برابر صفر بودن سرعت درجات آزادی در ابتدای حرکت در نظر گرفته می‌شود.

در نهایت روش شوتینگ منجر به دستگاه معادلات به شکل کلی رابطه ۱۷ می‌شود. در این رابطه $h(z_{p0}, T) = 0$ معادله شرایط فازی می‌باشد.

$$F(z_{p0}, T) = \begin{cases} H(z_{p0}, T) = 0 \\ h(z_{p0}, T) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

البته همیشه همه عوامل فوق برای تعیین طول گام لحاظ نمی‌شود. به طور مثال در روش هموتویی که پاسخ‌های میانی مهم نیست، عامل دوم در نظر گرفته نمی‌شود و یا زمانی که ترسیم منحنی پاسخ یک سیستم مدنظر است باید حتماً عامل دوم لحاظ گردد.

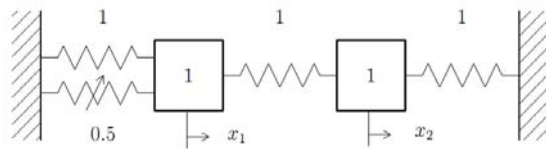
روش‌های مختلفی برای کنترل طول گام وجود دارد. در این رفتار همگرایی گام اصلاح حدس اولیه مدنظر قرار می‌گیرد. طول گام در هر مرحله به گونه‌ای انتخاب می‌شود که تعداد سعی‌ها در هر گام اصلاح ثابت بماند. از این رو طول گام در هر مرحله با استفاده از رابطه ۲۲ تعیین می‌شود.

$$s^{j+1} = \frac{N_{opt}}{N_j} s^j \quad (22)$$

در رابطه فوق s^{j+1} طول گام در مرحله مورد نظر، s^j طول گام در مرحله قبلی، N_{opt} تعداد سعی‌های مطلوب در مرحله اصلاح و N_j تعداد سعی‌های صورت گرفته در مرحله اصلاح گام قبلی می‌باشد.

نتایج عددی

به منظور بررسی دقت و کارایی روش EPFM، مودهای نرمال غیرخطی سیستم دو درجه آزادی شکل مورد محاسبه قرار گرفت و نتایج بدست آمده با نتایج ارائه شده در [۲۷] مقایسه گردید. نمای شماتیک سیستم مورد بررسی در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- نمای شماتیک سیستم دو درجه آزادی مورد مطالعه

معادله حاکم بر این سیستم به صورت رابطه (۲۳) می‌باشد:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2(x_1 - x_2) + 0.5x_1^3 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + (2x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

در روش EPFM از شکل مود و فرکانس سیستم خطی نظیر بعنوان حدس اولیه برای شروع محاسبات استفاده می‌گردد. شکل مود و فرکانس خطی نظیر این سیستم به ترتیب $\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $\omega^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$ می‌باشد که از آن‌ها برای شروع محاسبات استفاده می‌شود. شرایط فازی نیز به این صورت است که در ابتدای دوره تناوب مؤلفه‌های سرعت برابر صفر قرار داده می‌شود.

ابتدا رفتار مودهای نرمال غیر خطی سیستم تا سطوح انرژی متوسط مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل ۳ نمودار فرکانس-انرژی مود نرمال غیرخطی اول سیستم مورد نظر ترسیم شده است.

در روش تانژانت، حدس اولیه $(\tilde{z}_{p0(j+1)}, \tilde{T}_{(j+1)})$ برای پاسخ بعدی $(z_{p0(j+1)}, T_{(j+1)})$ در راستای بردار مماس در پاسخ معین $(z_{p0(j)}, T_{(j)})$ پیش‌بینی می‌شود. رابطه مقدار پیش‌بینی شده به شکل رابطه ۱۹ می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_{p0(j+1)} \\ \tilde{T}_{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{p0(j)} \\ T_{(j)} \end{bmatrix} + S_{(j)} \begin{bmatrix} P_z(j) \\ P_T(j) \end{bmatrix} \quad (19)$$

در این رابطه، $S_{(j)}$ طول گام در راستای بردار مماس است. سپس حدس اولیه که در گام پیش‌بینی تخمین زده شده بود با استفاده از روش نیوتون-رافسون تصحیح می‌گردد. در فرآیند تصحیح حدس اولیه به منظور افزایش سرعت همگرایی مقادیر اصلاحات شرایط اولیه و دوره تناوب بر بردار محاسبه شده در گام پیش‌بینی عمود می‌گردد. $(\tilde{z}_{(j+1)}, \tilde{T}_{(j+1)})$ به دست آمده در گام پیش‌بینی بعنوان اولین حدس استفاده می‌شود. در سعی k ام، شرایط اولیه و دوره تناوب با استفاده از رابطه ۲۰ به دست می‌آید. در این رابطه k شمارنده هر سعی در فرآیند اصلاح و j شمارنده نقطه پاسخ روی منحنی می‌باشد.

$$\begin{aligned} z_{p0(j+1)}^{k+1} &= z_{p0(j+1)}^k + \Delta z_{p0(j+1)}^k \\ T_{(j+1)}^{k+1} &= T_{(j+1)}^k + \Delta T_{(j+1)}^k \end{aligned} \quad (20)$$

مقادیر اصلاح شرایط اولیه و دوره تناوب با حل دستگاه معادلات نامعین زیر با استفاده از روش Moore-Penrose محاسبه می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|_{(z_{p0(j+1)}^k, T_{(j+1)}^k)} & \frac{\partial H}{\partial T} \Big|_{(z_{p0(j+1)}^k, T_{(j+1)}^k)} \\ h(z_{p0(j+1)}^k) & 0 \\ P_{z(j+1)} & P_{T(j+1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta z_{p0(j+1)}^k \\ \Delta T_{(j+1)}^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -H(z_{p0(j+1)}^k, T_{(j+1)}^k) \\ -h(z_{p0(j+1)}^k) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

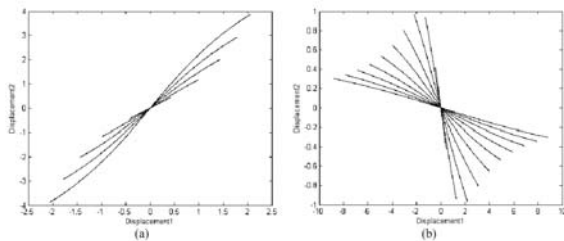
عنصر اصلی در پیاده‌سازی یک روش تداوم پاسخ بهینه و کاراً کنترل طول گام می‌باشد. روش‌های مختلفی برای کنترل طول گام وجود دارد.

حداقل سه عامل وجود دارد که طول گام را تحت تأثیر قرار می‌دهد. این عوامل عبارتند از:

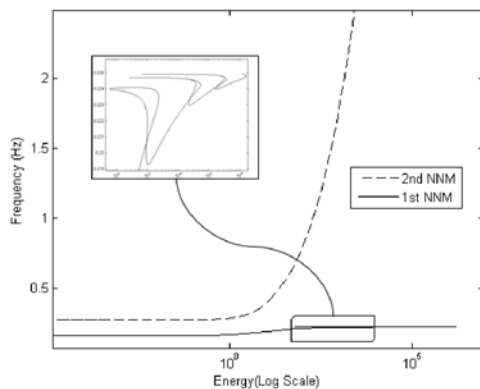
رفتار همگرایی: طول گام باید به نحوی تعیین گردد که در هر گام اصلاح حدس اولیه، سرعت همگرایی مناسبی وجود داشته باشد. تخمین منحنی پاسخ: طول گام باید به نحوی کنترل گردد که جزئیات کوچک منحنی پاسخ نیز تخمین زده شود. چند شاخگی: طول گام باید به نحوی انتخاب شود که نقاط چند شاخگی روی منحنی پاسخ به خوبی مشخص گردد.

در شکل ۵ مدهای نرمال غیرخطی سیستم مورد نظر در سطوح بالاتر انرژی ترسیم شده است. فرکانس هر دو مود با افزایش انرژی، زیاد می شود. در منحنی فرکانس- انرژی مود اول، سه زبانه مشاهده می شود. این زبانه ها بیانگر رخ دادن تشدید داخلی در این مود است.

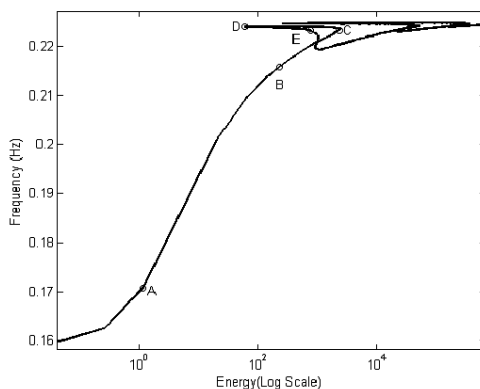
در شکل ۶ مود نرمال غیرخطی اول در سطوح بالاتر انرژی نمایش داده شده است. با استفاده از روش EPFM، ۲۵۵ ثانیه طول می کشد تا برهم کنش مودال اول استخراج شود، این در حالی است که در صورت عدم اسفاده از رابطه به روزرسانی ۲۶۴۷ ثانیه طول خواهد کشید تا نتایج مشابه استحصال گردد. برای محاسبه هر سه برهم کنش مودال با استفاده از EPFM، ۲۶۸۳ ثانیه زمان لازم است، در غیر این صورت ۱۵۴۰۸ ثانیه طول می کشد تا این نتایج بدست آید.



شکل ۴- منحنی مودال مود نرمال غیرخطی اول (a) و دوم (b)

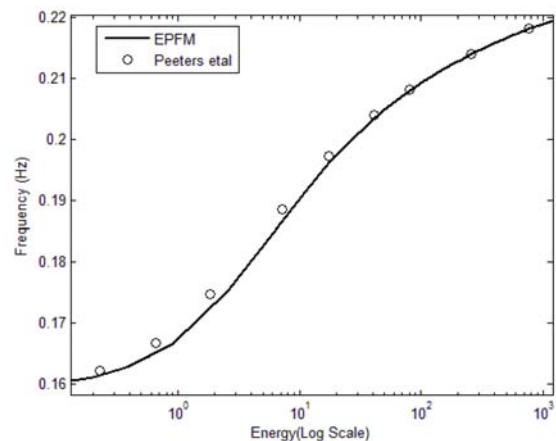


شکل ۵- نمودار فرکانس انرژی مدهای اول و دوم غیرخطی در سطوح انرژی بالا



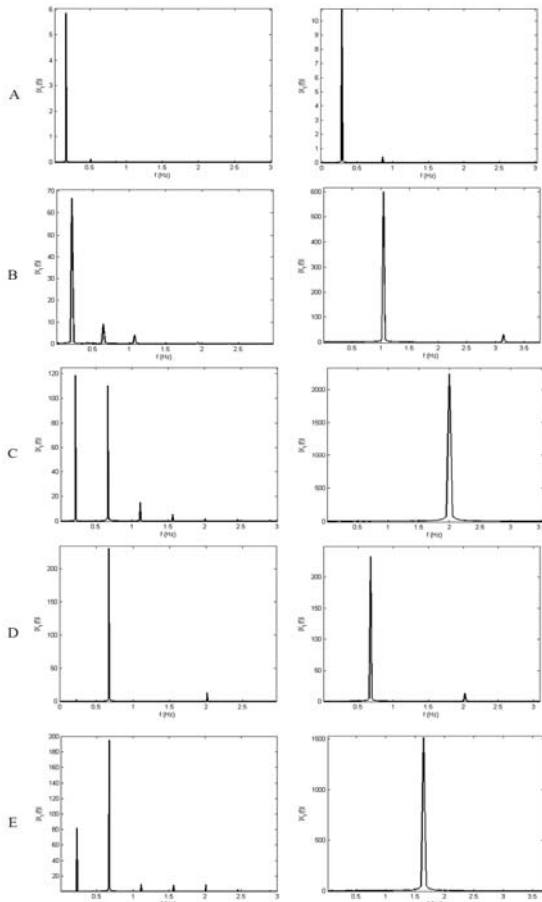
شکل ۶- نمودار فرکانس انرژی مود نرمال غیرخطی اول در سطوح انرژی بالا

همان طور که از نمودار پیداست، با افزایش انرژی سیستم فرکانس مود نرمال غیرخطی اول نیز افزایش می یابد. این امر بعلا آن است که فرکانس غیرخطی موجود در سیستم از نوع درجه سه می باشد، از این رو با افزایش انرژی، فرکانس سیستم نیز افزایش می یابد و یا بعبارت دیگر فرکانس غیرخطی سخت تر می شود. در ادامه هر یک از این مدهای نرمال غیرخطی به شکل مفصل تری مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همان طور که مشاهده می شود، نتایج به دست آمده از روش EPFM به خوبی با نتایج به دست آمده توسط پیترز و همکارانش همخوانی دارد. نتایج بدست آمده در این شکل به وسیله یک کامپیوتر دارای CPU از نوع 2.2 GHz corei7 و حافظه به ظرفیت 8GB، بدون استفاده از رابطه به روزرسانی در مدت زمان ۳۵ ثانیه بدست آمد. در حالی که با استفاده از رابطه به روزرسانی مدت زمان انجام محاسبات ۹.۵ ثانیه خواهد بود. این بدان معناست که روش EPFM، ۳.۶ برابر سریع تر است.



شکل ۳- نمودار فرکانس انرژی مود نرمال غیرخطی اول تا سطوح انرژی متوسط

در شکل ۴ منحنی مودال مود نرمال غیر خطی اول و دوم ترسیم شده است. همان طور که در شکل دیده می شود، در سطوح انرژی خیلی کم، منحنی مودال به شکل خط صاف می باشد که این خط صاف منحنی مودال سیستم خطی نظیر است. رفته رفته با افزایش سطح انرژی، این منحنی از حالت خطی خارج می شود و به شکل منحنی در می آید. نکته مهم دیگری که به خوبی در این شکل قابل مشاهده است، با افزایش سطح انرژی سیستم دامنه ارتعاشات درجه آزادی دوم در مود نرمال غیرخطی اول از دامنه ارتعاشات درجه آزادی اول سیستم بیشتر می شود. یا بعبارت دیگر با افزایش سطح انرژی، مود نرمال غیرخطی اول محلی می شود، یعنی بیشتر انرژی ارتعاشات در درجه آزادی دوم متمرکز می گردد. در حالی که در مود نرمال غیرخطی دوم این موضوع بر عکس است و بیشتر انرژی ارتعاشات در درجه آزادی اول متمرکز می شود.



شکل ۹- پاسخ فرکانسی مود اول (سمت چپ) و مود دوم (سمت راست) قبل و بعد از تشدید داخلی

نتایج عددی

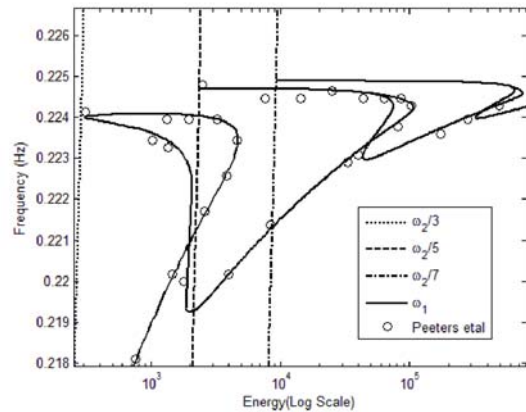
در این مقاله یک الگوریتم جدید مبتنی بر روش دنبال کننده مسیر بهینه (EPFM) برای محاسبه مدهای نرمال غیرخطی ارائه شد. به منظور افزایش سرعت محاسبات در این الگوریتم از یک رابطه به روزرسانی در محاسبه ماتریس ژاکوبی بهره گرفته شد. به منظور بررسی دقت و کارایی این الگوریتم یک سیستم دو درجه آزادی غیر خطی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج بدست آمده، سازگاری بسیار خوبی با نتایج ارائه شده در سایر منابع دارد. همچنین سرعت روش EPFM، ۱۰ برابر بیشتر از روش مشابه می باشد. همچنین نتایج بدست آمده نشان می دهد هر چه میزان غیرخطی بودن سیستم افزایش می یابد، کارایی این روش نیز بیشتر می گردد.

مراجع

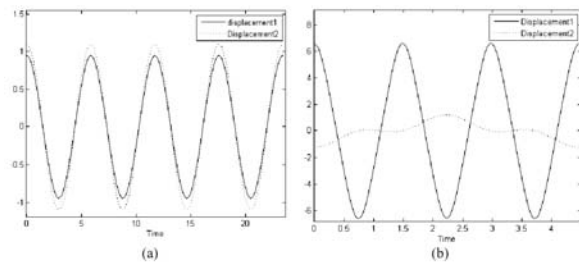
- [1] A.F. Vakakis, Analysis and identification of linear and nonlinear normal modes in vibrating systems, in: Mechanical engineering, California Institute of Technology, California, 1991.

در شکل ۷ این زبانه ها با جزئیات بیشتری نمایش داده شده است. این زبانه ها به ترتیب بیانگر تشدید داخلی در نسبت های ۱:۳، ۱:۵ و ۱:۷ می باشد. همان طور که مشاهده می شود، نتایج سازگاری بسیار خوبی با نتایج موجود در [۲۷] دارد.

در شکل ۸ پاسخ زمانی سیستم قبل و بعد از تشدید داخلی ترسیم شده است. همان طور که مشاهده می گردد، پاسخ سیستم پس از برهم کنش مودال دیگر هم آهنگ نیست.



شکل ۷- جزئیات برهم کنش مودال در مود نرمال غیرخطی اول



شکل ۸- نمودار پاسخ زمانی قبل (a) و بعد از (b) برهم کنش مودال

در شکل ۹ پاسخ فرکانسی مود اول و دوم غیرخطی سیستم قبل و بعد از تشدید داخلی نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود در سطوح انرژی پایین، در هر یک از مدهای غیرخطی تنها یک هارمونیک وجود دارد که به خوبی از یکدیگر فاصله دارند. رفته رفته با افزایش انرژی، قدرت هارمونیک سوم در مود غیرخطی اول افزایش می یابد. البته کماکان این هارمونیک از هارمونیک اول مود دوم فاصله دارد. با افزایش بیشتر انرژی قدرت هارمونیک سوم در مود غیرخطی اول افزایش و قدرت هارمونیک اول کاهش می یابد تا اینکه در تشدید داخلی هارمونیک اول به کلی از بین می رود و فرکانس هارمونیک سوم مود اول با فرکانس هارمونیک اول مود دوم برابر می شود. پس از تشدید داخلی، مجدداً هارمونیک اول مود اول غیرخطی ظاهر می شود اما این بار قدرت کمتر از هارمونیک سوم است.

- [25] Y.S. Lee, G. Kerschen, A.F. Vakakis, P. Panagopoulos, L. Bergman, D.M. McFarland, Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment, Publisher, City, 2005.
- [26] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval, A.F. Vakakis, Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist, Publisher, City, 2009.
- [27] M. Peeters, R. Vigiuié, G. Sérandour, G. Kerschen, J.C. Golinval, Nonlinear normal modes, Part II: Toward a practical computation using numerical continuation techniques, Publisher, City, 2009.
- [28] R.J. Kuether, M.S. Allen, A numerical approach to directly compute nonlinear normal modes of geometrically nonlinear finite element models, Publisher, City, 2014.
- [29] R.J. Kuether, B.J. Deaner, J.J. Hollkamp, M.S. Allen, Evaluation of Geometrically Nonlinear Reduced-Order Models with Nonlinear Normal Modes, Publisher, City, 2015.
- [30] L. Renson, J.P. Noël, G. Kerschen, Complex dynamics of a nonlinear aerospace structure: numerical continuation and normal modes, Publisher, City, 2015.
- [31] A.F. Vakakis, Designing a Linear Structure with a Local Nonlinear Attachment for Enhanced Energy Pumping, Publisher, City, 2003.
- [32] K.V. Avramov, O.V. Gendelman, On interaction of vibrating beam with essentially nonlinear absorber, Publisher, City, 2010.
- [33] M.A. Al-Shudeifat, N.E. Wierschem, L.A. Bergman, A.F. Vakakis, Numerical and experimental investigations of a rotating nonlinear energy sink, Publisher, City, 2017.
- [34] M. Kurt, M. Eriten, D.M. McFarland, L.A. Bergman, A.F. Vakakis, Methodology for model updating of mechanical components with local nonlinearities, Publisher, City, 2015.
- [35] S. Peter, A. Grundler, P. Reuss, L. Gaul, R.I. Leine, Towards Finite Element Model Updating Based on Nonlinear Normal Modes, in: G. Kerschen (Ed.) Nonlinear Dynamics, Volume 1, Springer International Publishing, Cham, 2016, pp. 209-217.
- [36] D.A. Ehrhardt, M.S. Allen, T.J. Bebernis, S.A. Neild, Finite element model calibration of a nonlinear perforated plate, Publisher, City, 2017.
- [37] C.I. VanDamme, M. Allen, J.J. Hollkamp, Nonlinear Structural Model Updating Based Upon Nonlinear Normal Modes, in: 2018 AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2018.
- [38] M. Song, L. Renson, J.-P. Noël, B. Moaveni, G. Kerschen, Bayesian model updating of nonlinear systems using nonlinear normal modes, Publisher, City, 2018.
- [39] W. Lacarbonara, B. Carboni, G. Quaranta, Nonlinear normal modes for damage detection, Publisher, City, 2016.
- [40] F.B. Deuffhard P, Kunkel P, Efficient Numerical Pathfollowing Beyond Critical Points, Publisher, City, 1987.
- [2] A.F. Vakakis, Non-similar normal oscillations in a strongly non-linear discrete system, Publisher, City, 1992.
- [3] A.F. Vakakis, L.I. Manevitch, Y.V. Mikhlin, V.N.P. Chuk, A.A. Zevin, Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems John Wiley & Sons, 1996.
- [4] S. Shaw, C. Pierre, Non-linear normal modes and invariant manifolds, Publisher, City, 1991.
- [5] S. Shaw, C. Pierre, On nonlinear normal modes., Publisher, City, 1992.
- [6] S.W. Shaw, C. Pierre, Normal modes for non-linear vibratory systems, Publisher, City, 1993.
- [7] Y.V. Mikhlin, K.V. Avramov, Nonlinear Normal Modes for Vibrating Mechanical Systems. Review of Theoretical Developments, Publisher, City, 2011.
- [8] K.V. Avramov, Y.V. Mikhlin, Review of Applications of Nonlinear Normal Modes for Vibrating Mechanical Systems, Publisher, City, 2013.
- [9] L. Renson, G. Kerschen, B. Cochelin, Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering, Publisher, City, 2016.
- [10] J.P. Noël, G. Kerschen, Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress, Publisher, City, 2017.
- [11] A.M. Lyapunov, The General Problem of the Stability of Motion, Publisher, City, 1947.
- [12] A. Weinstein, Normal modes for nonlinear hamiltonian systems, Publisher, City, 1973.
- [13] J.J. Moser, Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein, Publisher, City, 1976.
- [14] H. Kauderer, Nichtlineare Mechanik Springer- Verlag, 1958.
- [15] R.M. Rosenberg, On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom, Publisher, City, 1966.
- [16] G. Haller, S. Ponsioen, Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction, Publisher, City, 2016.
- [17] E. Pesheck, Reduced order modeling of nonlinear structural systems using nonlinear normal modes and invariant manifolds, in, The University of Michigan., 2001.
- [18] S.W. Shaw, C. Pierre, Normal modes of vibration for non-linear continuous systems, Publisher, City, 1994.
- [19] L. Renson, G. Deliége, G. Kerschen, An effective finite-element-based method for the computation of nonlinear normal modes of nonconservative systems, Publisher, City, 2014.
- [20] G.I. Cirillo, A. Mauroy, L. Renson, G. Kerschen, R. Sepulchre, A spectral characterization of nonlinear normal modes, Publisher, City, 2016.
- [21] S. Ponsioen, T. Pedergnana, G. Haller, Automated computation of autonomous spectral submanifolds for nonlinear modal analysis, Publisher, City, 2018.
- [22] R. Seydel, Practical Bifurcation and Stability Analysis, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 2010.
- [23] W. Govaerts, Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria, SIAM, 2000.
- [24] J.C. Slater, A numerical method for determining nonlinear normal modes, Publisher, City, 1996.